ALGEBRA LINEARE

... Di che si parla? ...

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

① Spazio vettoriale (reale)

1) $\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}$

2) $(\vec{v} + \vec{w}) + \vec{u} = \vec{v} + (\vec{w} + \vec{u})$

3) $\exists\, 0 \quad 0 + \vec{v} = \vec{v}$

4) per $\vec{v}$ $\exists\, (-\vec{v}) + \vec{v} = 0$

5) $\lambda(\vec{v} + \vec{w}) = \lambda\vec{v} + \lambda(\vec{w})$

6) $(\mu + \lambda)\vec{v} = \mu\vec{v} + \lambda\vec{v}$

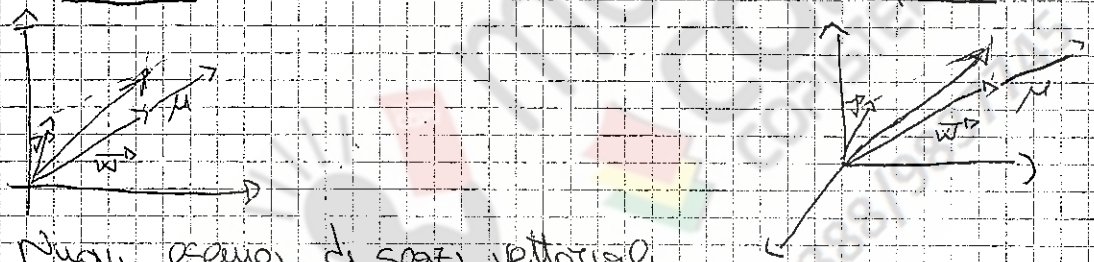
7) $(\lambda\mu)\vec{v} = \mu\vec{v} \cdot \lambda$

8) $\vec{v} \cdot 1 = \vec{v}$; $\vec{v} \cdot 0 = 0$ → vettore nullo, origine)

⇓

Sono vere a prescindere se parliamo del

PIANO 0 SPAZIO



② Alcuni esempi di spazi vettoriali

$\mathbb{R}^2$ = piano cartesiano (insieme dei punti, dati da una coppia)

$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}$ $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$

$\mathbb{R}^3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$ $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix}$

$\mathbb{R}^4 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$

$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$ → spazio vettoriale

$\mathbb{R}[x]$ = lo spazio dei polinomi → spazio vettoriale

$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$

$\lambda p(x) = \lambda a_0 + \lambda a_1 x + \lambda a_2 x^2 + \dots + \lambda a_n x^n$

$q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_n x^n$

$p(x) + q(x) = a_0 + b_0 + x(a_1 + b_1) + x^2(a_2 + b_2) + \dots + x^n(a_n + b_n)$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

③ Matrici

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ Rettangolare

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \end{pmatrix}$ $m \times n$ Taglia della matrice

Siano A, B due matrici di taglia $m \times n$:

$(A+B)_{ij} = (A)_{ij} + (B)_{ij}$

$\lambda (A)_{ij} = \lambda \cdot (A)_{ij}$

- Esempi:

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

OSSERVAZIONE: la somma è definita tra le matrici della stessa taglia

AFFERMAZIONE: La matrice ottenute da una somma o dal prodotto per un numero è uno spazio vettoriale

NOTAZIONE: Questo spazio vettoriale si denota con M

④ Prodotto tra matrici $< A \times B \; / \; B \times A$

Perché $A \times B$ sia definito, bisogna avere $\#$ (il numero di) colonne A uguale al numero di righe di B.

$(a_1, a_2 \dots a_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$

DEFINIZIONE: Siano $A \in M_{m \times k}$ e B una $M_{k \times n}$, allora $AB \in M_{m \times n}$

NOTAZIONE $\sum_{p=1}^{k} (A)_{ip} \times (B)_{pj}$; $(AB)_{ij}$, prodotto tra la i-esima riga di A e la j-esima colonna di B.

- Esempi:

$A \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ $B \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ $AB \begin{pmatrix} -9 & 5 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

ASSOCIATIVITÀ DEL PRODOTTO TRA MATRICI

$$X \circledcirc (Y \circledcirc Z) = (X \circledcirc Y) \circledcirc Z$$

$$A(BC) = (AB)C$$

- Non importa in quale operazione si tratti.
Le taglie di A e C sono libere, ma, una volta fissate, si stabilisce automaticamente ~~si fissa~~ quella di B

Proposizione Siano $A \in M_{m\times k}(\mathbb{R})$, $B \in M_{k\times \ell}(\mathbb{R})$ e $C \in M_{\ell\times n}(\mathbb{R})$
allora $A(BC) = (AB)C$

Dimostrazione Due matrici $A(BC) = (AB)C$ sono uguali tra loro se:

① Hanno la stessa taglia

$$\underset{m\times k}{A}\ \underset{k\times \ell}{(BC)}\ \underset{\ell\times n}{\ } \qquad \underset{m\times k}{(AB)}\ \underset{k\times \ell}{C}\ \underset{\ell\times n}{\ }$$

(BC): $k \times n$ — $m \times n$; (AB): $m \times \ell$ — $m \times n$

② Sono formate dagli stessi elementi situati negli stessi posti

$$[A(BC)] = \sum_{p=i}^{k} (A)_{ip} \cdot (BC)_{pj} \qquad [(AB)C] = \sum_{q=i}^{\ell} (AB)_{iq} \cdot (C)_{qj}$$

$$\sum_{p=1}^{k} (A)_{ip} = \left[(B)_{p1}(C)_{1p} + (B)_{p2}(C)_{2p} + \dots + (B)_{p\ell}(C)_{\ell j}\right] =$$

$$= A_{i1}\left[(B)_{11}(C)_{11} + (B)_{12}(C)_{21} + \dots + (B)_{1\ell}(C)_{\ell j}\right] +$$

$$+ A_{i2}\left[(B)_{21}(C)_{12} + (B)_{22}(C)_{22} + \dots + (B)_{2\ell}(C)_{\ell j}\right] + \dots$$

$$\dots + A_{ik}\left[(B)_{k1}(C)_{1k} + (B)_{k2}(C)_{2k} + \dots + (B)_{k\ell}(C)_{\ell j}\right] =$$

$$= (C)_{1j}\left[(A)_{i1}(B)_{11} + \dots + (A)_{ik}(B)_{k1}\right] + \dots$$

$$\dots + (C)_{2j}\left[(A)_{i1}(B)_{12} + \dots + (A)_{ik}(B)_{k2}\right] + \dots$$

$$\dots + (C)_{\ell j}\left[(A)_{i1}(B)_{1\ell} + \dots + (A)_{ik}(B)_{k\ell}\right] =$$

$$= (C)_{1,}(AB)_{:1} + (C)_{2,}(AB)_{:2} + \dots + (C)_{\ell_1}(AB)_{:\ell} =$$

$$= \sum_{q=1}^{\ell} (AB)_{:q}\,(C)_{q,} = [(AB)C]_{:} \quad \square$$